



ECUACIÓN JAMÁS RESUELTA

CÓMO DOS GENIOS MATEMÁTICOS
DESCUBRIERON EL LENGUAJE DE LA
SIMETRÍA

MARIO LIVIO

Ariel

Mario Livio

La ecuación jamás resuelta

Cómo dos genios matemáticos descubrieron
el lenguaje de la simetría

Traducción de Blanca Ribera de Madariaga

Ariel

Capítulo 1

Simetría

Una mancha de tinta en un trozo de papel no es algo especialmente atractivo para el ojo, pero si doblamos el papel antes de que la tinta se seque, podemos obtener algo parecido a la figura 1, que resulta mucho más fascinante. De hecho, la interpretación de manchas de tinta como ésta constituye la base del famoso test de Rorschach, desarrollado en los años veinte por el psiquiatra suizo Hermann Rorschach. El propósito declarado de este test es lograr averiguar los temores ocultos, las fantasías salvajes y los pensamientos más profundos de los entrevistados que interpretan las ambiguas siluetas. El valor real de este test como «radiografía de la mente» es objeto de fuerte debate en los círculos psicológicos. Como dijo en una ocasión Scott Lilienfeld, psicólogo de la Universidad de Emory: «De la mente de quién, ¿del paciente o del examinador?» Sin embargo, no se puede negar el hecho de que imágenes como la de la figura 1 transmiten una especie de impresión atractiva y fascinante. ¿Por qué?

¿Será porque el cuerpo humano, la mayoría de los animales y muchos artefactos humanos poseen una simetría bilateral similar? Y ante todo: ¿por qué todos esos rasgos zoológicos y creaciones de la imaginación humana presentan una simetría así?

La mayor parte de las personas perciben las composiciones

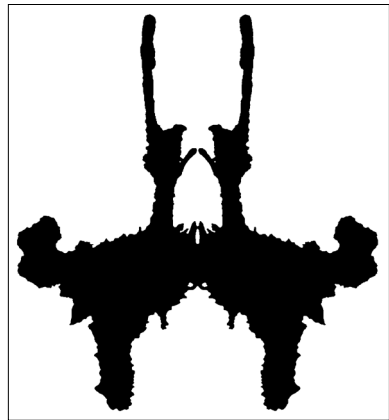


Figura 1

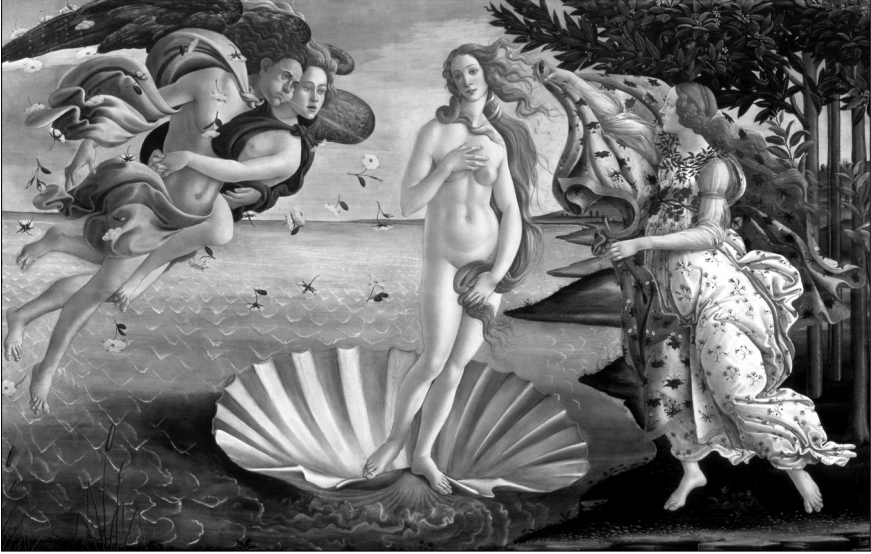


Figura 2

armoniosas tales como *El nacimiento de Venus* de Botticelli (fig. 2) como algo simétrico. El historiador del arte Ernst H. Gombrich señala incluso que «las libertades que Botticelli se tomó con la naturaleza para conseguir un contorno agradecido potencian la belleza y la armonía del diseño». Sin embargo, los matemáticos dirían que la composición de colores y formas de ese cuadro no son en absoluto simétricos en sentido matemático. En cambio, la mayoría de los espectadores no matemáticos no perciben el patrón de la figura 3 como asimétrico, aunque en realidad lo es de acuerdo con la definición matemática formal. Entonces, ¿qué es realmente la simetría? ¿Qué papel desempeña, si es que tiene alguno, en la percepción? ¿Qué relación guarda con nuestra sensibilidad estética? En el reino de la ciencia, ¿por qué se ha convertido la simetría en un concepto crucial en nuestra concepción del cosmos que nos rodea y en las principales teorías que tratan de explicarlo? Dado que la simetría abarca un rango de disciplinas tan amplio, ¿qué «lenguaje» y qué «gramática» utilizamos para describir y caracterizar las simetrías y sus atributos, y cómo se inventó ese lenguaje universal? En un tono más desenfadado, la simetría ¿puede dar respuesta a la pregunta fundamental que plantea el título de una de las canciones de la estrella de rock Rod Stewart: *Do Ya Think I'm Sexy?*

Voy a tratar de responder, al menos en parte, a todas estas preguntas y a muchas más. De paso, confío en que toda la historia presentará tanto el lado humanístico de las matemáticas como también, y más importante, el lado humano de los matemáticos. Como veremos, la simetría es la herramienta primordial para tender un puente sobre el vacío entre la ciencia y el arte, entre la psicología y las matemáticas. Abarca objetos y conceptos que van desde las alfombras persas hasta las moléculas de la vida, desde la Capilla Sixtina hasta la ansiada «Teoría del todo». Sin embargo, la teoría de grupos, el lenguaje matemático que describe la esencia de la simetría y explora sus propiedades, no surgió del estudio de las simetrías. Esta idea increíblemente unificadora del pensamiento moderno emanó más bien de una fuente de lo más inverosímil: una ecuación que no podía resolverse. La dramática y tortuosa historia de esta ecuación es una parte esencial de esta saga intelectual. Al mismo tiempo, esta historia arrojará alguna luz sobre la soledad del genio y la tenacidad del intelecto humano ante desafíos aparentemente insuperables. He realizado un tremendo esfuerzo para tratar de resolver el misterio de la muerte del protagonista de esta historia, que se remonta a más de dos siglos atrás: el brillante matemático Évariste Galois. Y creo que me he acercado más que nunca a la verdad.

El ingenioso dramaturgo George Bernard Shaw dijo en una ocasión: «El hombre razonable se adapta al mundo; el que no lo es, persiste tratando de que el mundo se adapte a él. Por tanto, todo el progreso depende del hombre poco razonable.» En esta obra encontraremos muchos hombres y mujeres poco razonables. El proceso creativo, por su misma naturaleza, busca terrenos intelectuales y emocionales sin explorar. Las breves incursiones en la abstracción matemática nos permitirán vislumbrar la naturaleza misma de la creatividad. Voy a comenzar por una concisa exploración del maravilloso mundo de las simetrías.

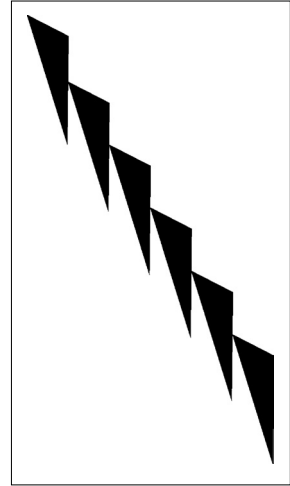


Figura 3

Inmunidad a los cambios

La palabra *simetría* tiene raíces muy antiguas: procede del griego *sym* y *metria*, lo que traducimos por «la misma medida». Cuando los griegos tachaban una obra de arte o un diseño arquitectónico de simétrico, se referían a que era posible identificar cualquier pequeño fragmento de la obra, de tal forma que las dimensiones de todas las partes restantes contenían ese fragmento un número exacto de veces (las partes eran «conmensurables»). Esta primera definición se corresponde más con nuestra idea moderna de la proporción que con la simetría. No obstante, los grandes filósofos Platón (428/427–348/347 a.C.) y Aristóteles (384–322 a.C.) asociaron de inmediato la simetría con la belleza. Según palabras de Aristóteles, «Las principales formas de belleza son disposición ordenada [en griego *taxis*], proporción [*symmetria*] y calidad de definitivo [*horis-menon*], las cuales se revelan especialmente a través de las matemáticas.» Siguiendo los pasos de los griegos, la identificación de la simetría con la «proporción adecuada» fue posteriormente propagada por el influyente arquitecto romano Vitruvio (alrededor del 70–25 a.C.) y persistió hasta el Renacimiento. En su *De Architectura Libri Decem (Diez libros sobre arquitectura)*, literalmente la biblia de la arquitectura europea durante siglos, Vitruvio escribe:

El diseño de una plantilla depende de la simetría, los principios de la cual deben ser observados con sumo cuidado por el arquitecto. Se refieren a la proporción. La proporción es la correspondencia entre las medidas de los miembros de una obra completa y del todo en relación con una parte determinada seleccionada como estándar. De aquí derivan los principios de la simetría.

El significado moderno de la simetría (introducida por primera vez a finales del siglo XVIII) en el preciso sentido matemático es, en realidad, «inmunidad a un posible cambio». O, como dijo en una ocasión el matemático Hermann Weyl (1885–1955), «Una cosa es simétrica si se le puede hacer algo de tal modo que al acabar tenga el mismo aspecto que antes». Vamos a examinar por ejemplo los siguientes versos:

Is it odd how asymmetrical
Is «symmetry»?
«Symmetry» is asymmetrical.
How odd it is.

¿Es extraño lo asimétrica
que es la «simetría»?
La «simetría» es asimétrica.
¡Qué extraño es!

Esta estrofa permanece inalterable si se lee palabra por palabra desde el final hasta el principio: es simétrica en relación con su lectura hacia atrás. Si se imagina las palabras como cuentas ensartadas en un hilo, puede considerar esta lectura al revés como una especie de reflejo (no literal) de la estrofa en un espejo. Esta estrofa no cambia cuando se refleja en el espejo en el sentido antes mencionado: es simétrica respecto a ese reflejo en el espejo. O bien, si prefiere pensar en términos de leer el poema en voz alta, entonces la lectura hacia atrás corresponde a una inversión temporal, algo así como rebobinar una cinta de vídeo (tampoco esta vez de forma literal, ya que los sonidos individuales no se invierten). Las frases que poseen esta propiedad se denominan *palíndromos*.

La invención de los palíndromos se atribuye generalmente a Sotades el Obsceno de Maronea, que vivió en el siglo III a.C. en el Egipto dominado por los griegos. Los palíndromos han sido extremadamente populares gracias a muchos genios de los juegos de palabras, como el inglés J. A. Lindon, o al espléndido autor de matemática recreativa Martin Gardner. Uno de los divertidos palíndromos de palabras de Lindon dice: «Girl, bathing on Bikini, eyeing boy, finds boy eyeing bikini on bathing girl.» Otros palíndromos son simétricos respecto a su lectura de final a principio letra por letra: «Able was I ere I saw Elba» (atribuido en broma a Napoleón) o el título de un famoso programa de televisión NOVA: «A Man, a Plan, a Canal, Panama.»

Sorprendentemente, los palíndromos no sólo aparecen en ingeniosos juegos de palabras, sino también en la estructura del cromosoma Y que define el género masculino. La secuencia genómica entera del Y no fue completada hasta el año 2003. Éste fue el descubrimiento culminante de un esfuerzo heroico y reveló que la capacidad de conservación del cromosoma de este sexo ha sido enormemente subestimada. Otros pares cromosómicos humanos luchan contra las mutaciones dañinas intercambiando genes. Como el cromosoma Y carece de un par, los biólogos genomistas habían estimado previamente que su carga genética estaba a punto de agotarse en quizá tan sólo cinco millones de años. Sin embargo, para su sorpresa, los miembros del grupo investigador de la secuencia descubrieron que el cromosoma lucha atenuándola mediante palíndromos. Aproximadamente seis millones de sus cincuenta millones de letras de ADN forman secuencias palindrómicas, secuencias que se leen igual hacia delante y hacia atrás en las dos hebras de la doble

hélice. Estas copias no sólo ofrecen un copia de seguridad en el caso de mutaciones perjudiciales, sino que también permiten al cromosoma, en cierta medida, tener sexo consigo mismo: los brazos pueden intercambiar su posición y los genes se mezclan. Como dijo el jefe del equipo investigador del MIT David Page: «El cromosoma Y es una sala de espejos.»

Naturalmente, el ejemplo más habitual de la simetría del reflejo de un espejo es la de la simetría bilateral que caracteriza el reino animal. Desde las mariposas hasta las ballenas y desde las aves a los humanos, si reflejamos la mitad izquierda en un espejo obtenemos algo prácticamente idéntico a la mitad derecha. Por el momento, voy a ignorar las pequeñas aunque tormentosas diferencias externas que sin duda existen y también el hecho de que ni la anatomía interna ni las funciones cerebrales posean una simetría bilateral.

Para mucha gente, la palabra *simetría* significa, en realidad, simetría bilateral. Incluso en el *Webster's Third New International Dictionary*, una de las deficiones dice: «Correspondencia en tamaño, forma y posición relativa de partes que se encuentran en lados opuestos de una línea divisoria o de un plano mediano.» La descripción matemática exacta de la simetría del reflejo utiliza los mismos conceptos. Tomemos el dibujo de una mariposa simétrica bilateralmente y tracemos una línea recta de arriba abajo por la mitad de la figura. Si doblamos el dibujo por la línea, se producirá una superposición perfecta. La mariposa continúa inalterada —invariante— bajo el reflejo a lo largo de su línea central.

La simetría bilateral es tan frecuente en animales que a duras penas sí puede atribuirse al azar. De hecho, si pensamos en los animales como vastos grupos de miles y miles de millones de moléculas, hay infinitamente más formas de construir configuraciones asimétricas que simétricas a partir de esos bloques de construcción. Los trozos de un jarrón roto pueden formar un montón de formas variadas, pero sólo hay una disposición en la que todas juntas encajan para reproducir el jarrón intacto (y normalmente bilateralmente simétrico). Sin embargo, el antecedente fósil de las colinas Ediacara de Australia muestra que los organismos de cuerpo blando (*Spriggina*) que se remontan al período Vendiano (hace 650 a 543 millones de años) ya presentaban una simetría bilateral.

Dado que las formas de vida en la Tierra se crearon a través de eones de evolución y selección natural, de algún modo estos proce-

sos se decantaron hacia la simetría bilateral o especular. De las diferentes apariencias que los animales podían haber adoptado, prevalecieron las simétricas bilaterales. No podemos evitar llegar a la conclusión de que esta simetría fue el resultado probable del crecimiento biológico. ¿Podemos entender la causa de esta particular predilección? Al menos, podemos intentar descubrir algunas de las raíces de la ingeniería en las leyes de la mecánica. Un hecho clave es que en la superficie terrestre todas las direcciones no fueron creadas igual. La gravedad introdujo una clara distinción entre arriba y abajo (*dorsal* y *ventral* en los animales, en lenguaje biológico). En la mayoría de los casos, lo que sube tiene que bajar, pero no al revés. Otra distinción, entre delante y detrás, es el resultado de la locomoción animal.

Cualquier animal que se mueva con relativa rapidez, ya sea por tierra, mar o aire, tiene una clara ventaja si su parte delantera es diferente de la trasera. Tener todos los órganos sensoriales, los principales detectores de luz, sonido, olor y gusto en la parte delantera ayuda sin duda alguna al animal a la hora de decidir adónde dirigirse y cuál es el mejor modo de conseguirlo. Un «radar» frontal también supone un buen sistema de alerta frente a los peligros potenciales. Tener la boca delante también puede suponer una diferencia decisiva a la hora de llegar el primero a la comida. Al mismo tiempo, el verdadero mecanismo del movimiento (especialmente en la tierra y en el aire) bajo la influencia de la fuerza gravitatoria terrestre ha generado una clara diferencia entre arriba y abajo. Una vez que la vida pasó del mar a la tierra, surgió la necesidad de algún tipo de artilugio mecánico —las patas— que transportara al animal. Apéndices así no eran necesarios en la parte de arriba, con lo cual la diferencia entre arriba y abajo se hizo aún más evidente. La aerodinámica del vuelo (incluso bajo condiciones de gravedad terrestre) junto con la necesidad de un tren de aterrizaje y algunos recursos para moverse en tierra, se combinaron para introducir las diferencias arriba-abajo en las aves.

Sin embargo, aquí llegamos a una importante conclusión: *No hay nada importante que distinguir entre derecha e izquierda ni en la tierra, ni el mar, ni el aire.* El halcón cuando mira a la derecha ve el mismo panorama que cuando mira a la izquierda. No puede decirse lo mismo de arriba y abajo —arriba es el lugar del cielo donde el halcón vuela aún más alto, mientras que abajo es donde se posa y construye su nido. Bromas políticas aparte, realmente en la

Tierra no hay demasiada diferencia entre derecha e izquierda porque no existen fuerzas horizontales intensas. Para estar seguros, la rotación de la Tierra alrededor de su eje y el campo magnético terrestre (el hecho de que la Tierra actúe sobre lo que la rodea como un imán) introduce una asimetría. Sin embargo, estos efectos no son tan significativos a nivel macroscópico como los de la gravedad y el veloz movimiento animal.

Hasta ahora la descripción explica por qué la simetría bilateral de los organismos vivos tiene sentido desde el punto de vista mecánico. La simetría bilateral también es económica: conseguir dos órganos por el precio de uno. Cómo surgió esta simetría, o su falta, a partir de la biología evolutiva (los genes) o incluso, y sobre todo, de las leyes de la física, es una cuestión más difícil y volveré sobre ella en los capítulos 7 y 8. Aquí me limitaré a dejar constancia de que muchos animales multicelulares desarrollan muy pronto un cuerpo embrionario que carece de simetría bilateral. La fuerza motriz que subyace a la modificación del «plan original» a medida que el embrión crece puede muy bien ser la movilidad.

No todas las naturalezas animadas viven a toda máquina. Las formas de vida que están ancladas en un sitio y son incapaces de moverse voluntariamente, como las plantas y los animales sésiles, tienen arriba y abajo muy diferentes, aunque no distinguen entre delante y detrás, derecha o izquierda. Presentan una simetría similar a la de un cono: producen reflejos simétricos en cualquier espejo que se les pase por su eje vertical central. Algunos animales que se desplazan con suma lentitud tienen una simetría similar.

Obviamente, una vez que la simetría bilateral se desarrolló en las criaturas vivientes, había todo tipo de razones para mantenerla intacta. Cualquier pérdida de una oreja o de un ojo dejaría al animal mucho más vulnerable frente a un depredador que se le acercara sigilosamente.

Cabe preguntarse si la especial configuración estándar de la que nos ha dotado la naturaleza es la óptima. El dios romano Jano, por ejemplo, era el dios de las puertas y de los nuevos comienzos, incluyendo el primer mes del año (enero). Por ello, su representación habitual es bifronte, esto es, con una cara mirando hacia delante (simbólicamente hacia el año entrante) y otra hacia detrás (hacia el año pasado). Esta disposición en los humanos, aunque útil para algunos propósitos, no habría dejado sitio para las partes del cerebro responsables de los sistemas no sensoriales. En su espléndido libro *The New Ambidextrous Universe*, Martin Gardner explica la histo-

ria de un artista de Chicago que tenía la costumbre de discutir las ventajas de tener varios órganos sensoriales en sitios poco usuales del cuerpo. Las orejas debajo de las axilas, por ejemplo, habrían estado más calentitas en los fríos inviernos de Chicago. No hay duda de que una configuración así se asociaría con otras deficiencias. El sentido del oído de unas orejas bajo las axilas se habría visto seriamente perjudicado a menos que uno mantuviera los brazos levantados constantemente.

Las películas de ciencia-ficción invariablemente presentan alienígenas bilateralmente simétricos. Si existieran criaturas inteligentes extraterrestres que hubieran evolucionado biológicamente, ¿qué probabilidades habría de que presentaran una simetría reflectiva? Bastantes. Dada la universalidad de las leyes de la física, y especialmente de las leyes de la gravedad y el movimiento, las formas de vida de los planetas de fuera del sistema solar tienen que enfrentarse a algunos de los mismos desafíos medioambientales que la vida en la Tierra. La fuerza gravitatoria continúa manteniéndolo todo en la superficie del planeta y crea una discriminación significativa entre arriba y abajo. De igual modo, la locomoción separa el extremo delantero del final. Con toda probabilidad, E.T. es o era ambidextro. Sin embargo, esto no significa que cualquier delegación de visitantes alienígenas se nos pareciera en algo. Cualquier civilización lo bastante evolucionada para embarcarse en un viaje interestelar probablemente haya experimentado ya la fusión de su propia especie inteligente con criaturas superiores basadas en la tecnología computacional. Lo más probable es que la superinteligencia computacional sea de un tamaño microscópico.

Algunas letras mayúsculas del alfabeto se cuentan entre los numerosos objetos creados por los humanos que son simétricos respecto a la simetría reflectiva. Si sostenemos una hoja de papel con las letras A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y delante de un espejo, las letras serán iguales. Palabras (o incluso frases enteras) construidas con estas letras e impresas verticalmente, como la sencilla instrucción: