50 COSAS QUE HAY QUE SABER SOBRE MATEMÁTICAS

TONY CRILLY

Ariel

Tony Crilly

50 COSAS QUE HAY QUE SABER SOBRE MATEMÁTICAS

Traducción de
Enrique Herrando Pérez

Ariel CLAVES

Contenidos

01 El cero

A una edad temprana hacemos nuestra insegura entrada en la tierra de los números. Aprendemos que el 1 es el primero del «alfabeto numérico», y que introduce los números de conteo 1, 2, 3, 4, 5... que no son más que eso: cuentan cosas reales, manzanas, naranjas, plátanos, peras. No es hasta más tarde cuando podemos contar el número de manzanas que hay en una caja cuando no hay ninguna.

Los antiguos griegos y los romanos, célebres por sus proezas de ingeniería, carecían de una forma eficaz de lidiar con el número de manzanas que había en una caja vacía. Ellos no lograron dar un nombre a la «nada». Los romanos tenían sus formas de combinar I, V, X, L, C, D y M, pero ¿y el 0? Ellos no contaban «nada».

¿Cómo llegó a ser aceptado el cero? Se cree que el uso de un símbolo que designa «la nada» tuvo su origen hace miles de años. La civilización maya, en lo que es ahora México, usó el cero en diversas formas. Algún tiempo después, el astrónomo Claudio Ptolomeo, influido por los babilonios, usó un símbolo semejante a nuestro moderno 0 como marcador de posición en su sistema numérico. Como marcador de posición, el cero se podía usar para distinguir ejemplos (en notación moderna) como 75 y 705, en lugar de basarse para ello en el contexto, como habían hecho los babilonios. Esto se podría comparar con la introducción de la «coma» en el lenguaje: ambos ayudan a *leer* el significado correcto. Pero, así como la coma viene acompañada de un conjunto de reglas para su uso, también tiene que haber reglas para usar el cero.

Brahmagupta trató el cero como un «número», no como un mero marcador de posición, y expuso unas reglas para operar con él. Éstas incluían que «la suma de un número positivo y cero es positiva» y que «la suma de cero y cero es cero». Al pensar en el cero como un número, Brahmagupta fue bastante avanzado. El sistema de numeración hindú-arábigo que incluyó el cero de esta manera fue promulgado en occidente por Leonardo de Pisa, Fibonacci, en su *Liber Abaci* (*Libro*

Cronología

700 a.C.
Los babilonios usan el cero como marcador de posición en su sistema numérico

628 d.C.
Brahmagupta usa el cero y expone reglas para su uso con otros números

del ábaco), publicado en 1202. Instruido en la aritmética hindú-arábiga, reconoció el poder del uso del símbolo adicional 0 combinado con los símbolos hindúes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9.

El lanzamiento del cero dentro del sistema numérico planteaba un problema del que Brahmagupta se había ocupado brevemente: ¿cómo se habría de tratar a este «intruso»? ¿Cómo podría integrarse el cero en el sistema aritmético de entonces de una forma más precisa? Algunos ajustes eran sencillos. Cuando se trataba de hacer sumas y multiplicaciones, el 0 encajaba perfectamente, pero «el extranjero» no encajaba fácilmente en las operaciones de sustracción y división.

¿Cómo funciona el cero? La adición y la multiplicación con el cero son sencillas y en absoluto polémicas (se puede agregar 0 a 10 para obtener cien, pero nos referiremos a la adición en el sentido menos imaginativo de esta operación numérica). Sumar 0 a un número deja a ese número inalterado, mientras que multiplicar 0 por cualquier número siempre da 0 como solución. Por ejemplo, tenemos $7 + 0 = 7$ y $7 \times 0 = 0$. La sustracción es una operación sencilla pero puede llevar a negativos, $7 - 0 = 7$ y $0 - 7 = -7$, mientras que la división que implica al cero plantea dificultades.

Imaginemos una extensión que se ha de medir con una vara. Suponga que la vara de medir tiene en realidad una longitud de 7 unidades. Nos interesa saber cuántas varas de medir podemos extender a lo largo de nuestra extensión dada. Si la extensión que ha de medirse es en realidad de 28 unidades, la solución es 28 dividido por 7, o, en símbolos, $28 : 7 = 4$. Una notación mejor para expresar esta división es

$$\frac{28}{7} = 4$$

y después podemos hacer una «multiplicación cruzada» para escribir esto en términos de multiplicación, como $28 = 7 \times 4$. Bien, ¿qué podemos hacer con 0 dividido por 7? Para que nos ayude a proponer una solución en este caso, llamemos a a la solución, de manera que

$$\frac{0}{7} = a$$

Por multiplicación cruzada, esto equivale a $0 = 7 \times a$. Si esto es así, el único valor posible para a es 0, porque si la multiplicación de dos nú-

830	1100	1202
Mahavira tiene ideas sobre cómo interactúa el cero con otros números	Bhaskara usa el 0 como símbolo en el álgebra e intenta mostrar cómo se maneja	Fibonacci usa el símbolo adicional 0 añadido al sistema hindú-arábigo de números 1, ..., 9, pero no como un número al mismo nivel que ellos

meros da 0, uno de ellos debe ser 0. Evidentemente ese número no es 7, así que *a* debe ser un cero.

Ésta *no* es la principal dificultad que entraña el cero. La cuestión peligrosa es la división *por* 0. Si intentamos tratar a 7/0 de la misma manera que lo hacíamos con 0/7, tendríamos la ecuación

$$\frac{7}{0} = b$$

Por multiplicación cruzada, $0 \times b = 7$ y acabamos con el absurdo de que $0 = 7$. Al admitir la posibilidad de que 7/0 sea un número, tenemos grandes posibilidades de provocar un caos numérico de dimensiones colosales. La forma de evitarlo es decir que 7/0 es indefinido. No es permisible encontrar algún sentido a la operación de dividir 7 (o cualquier otro número que no sea cero) por 0, así que simplemente no permitimos que esta operación tenga lugar. De igual modo, no es permisible poner una coma en mitad de una palabra sin degenerar en el absurdo.

El matemático Bhaskara se planteó la división por 0 y propuso que un número dividido por 0 era infinito. Esto es razonable, porque si dividimos un número por un número muy pequeño la solución es muy grande. Por ejemplo, 7 dividido por un décimo es 70, y por un centésimo es 700. Si hacemos que el número del denominador sea cada vez más pequeño, la solución que obtenemos es cada vez más grande. En la máxima pequeñez, el propio 0, la solución debe ser el infinito. Si adoptamos esta forma de razonar, quedamos en situación de tener que explicar un concepto aún más extraño: esto es, el infinito. Enfrentarse al problema del infinito no ayuda; el infinito (con su notación estándar ∞) no se ajusta a las reglas habituales de la aritmética y no es un número en el sentido habitual.

Si 7/0 constituía un problema, ¿qué se puede hacer con el aún más extraño 0/0? Si $0/0 = c$, por multiplicación cruzada llegamos a la ecuación $0 = 0 \times c$ y al hecho de que $0 = 0$. Esto no resulta especialmente esclarecedor, pero tampoco es ningún absurdo. De hecho, *c* puede ser *cualquier número* y no llegamos a una imposibilidad. Llegamos a la conclusión de que 0/0 puede ser cualquier cosa; en los círculos matemáticos bien educados se le llama «indeterminado».

Considerándolo todo, cuando nos planteamos la división por cero llegamos a la conclusión de que es mejor excluir esa operación de la forma en la que hacemos los cálculos. Podemos hacer aritmética tranquilamente sin ella.

¿Para qué sirve el cero? Sencillamente, no podríamos prescindir del 0. El progreso de la ciencia ha dependido de él. Hablamos de cero grados de longitud, de cero grados en la escala de temperatura, y, de igual modo, de energía cero, y de gravedad cero. El cero ha entrado en el lenguaje no científico con ideas tales como la hora cero y la tolerancia cero.

Pero, podría hacerse un mayor uso de él. Si usted se baja en la acera de la Quinta Avenida de la ciudad de Nueva York y entra en el Empire State Building, se hallará en el espléndido vestíbulo de la entrada de la planta número 1. Con ello se hace uso de la capacidad que tienen los números para ordenar, 1 por «primero», 2 por «segundo» y así sucesivamente, hasta 102 por «centésimo segundo.» En Europa sí que tienen una planta 0, pero existe cierta renuencia a llamarla así.

Todo sobre la nada

La suma de cero y un número positivo es positiva

La suma de cero y un número negativo es negativa

La suma de un positivo y un negativo es su diferencia; o, si son iguales, cero

Cero dividido por un número negativo o positivo, o bien es cero o bien se expresa como una fracción con el cero como numerador y la cantidad finita como denominador

Brahmagupta, 628 d.C.

Las matemáticas no podrían funcionar sin el cero. Éste está en el meollo de conceptos matemáticos que hacen que el sistema numérico, el álgebra, y la geometría funcionen. En la línea de los números, el 0 es el número que separa los números positivos de los negativos y, por consiguiente, ocupa una posición privilegiada. En el sistema decimal, el cero sirve como marcador de posición que nos permite usar tanto números enormes como cifras microscópicas.

A lo largo de cientos de años, el cero se ha ido progresivamente aceptando y utilizando, y se ha convertido en una de las mayores invenciones del hombre. El matemático norteamericano del siglo XIX G. B. Halsted adaptó *El sueño de una noche de verano* de Shakespeare para escribir sobre él como el motor de un progreso que otorga «a la nada impalpable, no solamente un nombre y un espacio de existencia, una imagen, un símbolo, sino también un poder útil, la característica de la raza hindú de la que surgió».

Cuando se introdujo el 0, se debió de considerar algo extraño, pero los matemáticos tienen la manía de aferrarse a conceptos extraños que resultan ser útiles mucho más tarde. El equivalente de ello en la actualidad se da en la teoría de conjuntos, en la que la idea de un *conjunto* es un grupo de elementos. En esta teoría $\emptyset$ designa al conjunto sin ningún elemento, el llamado «conjunto vacío». Ahora esa idea resulta extraña, pero, al igual que el 0, es indispensable.

La idea en síntesis: la nada no es nada desdeñable

02 Sistemas numéricos

Un sistema numérico es un método para tratar el concepto de «cuántos». Diferentes culturas han adoptado diversos métodos, que abarcan desde el básico, «uno, dos, tres, muchos», hasta la extremadamente sofisticada notación decimal posicional que usamos hoy en día.

Los sumerios y los babilonios usaban un sistema de valor de posición para su uso práctico cotidiano. Decimos que es un sistema de valor de posición porque podemos distinguir el «número» por la posición de un símbolo. También usaban el 60 como unidad fundamental: es lo que actualmente llamamos un sistema de «base 60». Todavía nos quedan vestigios de la base 60: hay 60 segundos en un minuto, hay 60 minutos en una hora. Al medir los ángulos, seguimos considerando que el ángulo completo es de 360 grados, a pesar del intento del sistema métrico por hacerlo de 400 grados.

Aunque nuestros antepasados fundamentalmente quisieran los números para fines prácticos, hay algunas pruebas que demuestran que a estas primeras culturas les intrigaban las matemáticas en sí mismas, y de que sustraían tiempo a los asuntos prácticos de la vida para explorarlas. Estas exploraciones incluyeron lo que podríamos llamar «álgebra» y también las propiedades de las figuras geométricas.

Los egipcios usaban la base diez con un sistema de signos jeroglíficos y desarrollaron un sistema para ocuparse de las fracciones; pero la notación decimal de valor de posición de la actualidad tuvo su origen en los babilonios, y fue perfeccionada por los hindúes. Su ventaja estriba en que puede usarse para expresar tanto números muy pequeños como muy grandes. Usando solamente los números hindú-arábigos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9, se pueden hacer cálculos con relativa facilidad. Para comprender esto, examinemos el sistema romano, que se adaptaba a

Cronología

30000 a.C.
Pueblos paleolíticos de Europa hacen marcas numéricas en huesos

2000 a.C.
Los babilonios usan símbolos para representar números

sus necesidades, pero sólo los especialistas eran capaces de realizar cálculos con él.

El sistema romano Los símbolos básicos que usaban los romanos eran las «decenas» (*I*, *X*, *C* y *M*), y las «mitades» de estas (*V*, *L* y *D*). Los símbolos se combinan para formar otros. Se ha propuesto que el uso de *I*, *II*, *III* y *IIII* proviene del aspecto de nuestros dedos, *V* de la forma de la mano, y que invirtiéndola y uniendo las dos para formar la *X* obtenemos dos manos o diez dedos. *C* viene de *centum* y *M* de *mille*, los vocablos del latín que significan cien y mil, respectivamente. Los romanos también usaban *S* para designar «la mitad» y un sistema de fracciones basado en el 12.

El sistema romano hacía cierto uso de un método de «antes y después» para producir los símbolos necesarios, pero, según parece, éste no estaba adoptado uniformemente. Los antiguos romanos preferían escribir *IIII*, y el *IV* no se introdujo hasta más tarde. He aquí los números *básicos* del sistema romano, con algunos complementos que se incorporaron en la época medieval:

El sistema numérico romano

Imperio romano	apéndices medievales
S mitad	
I uno	
V cinco	$\overline{V}$ cinco mil
X diez	$\overline{X}$ diez mil
L cincuenta	$\overline{L}$ cincuenta mil
C cien	$\overline{C}$ cien mil
D quinientos	$\overline{D}$ quinientos mil
M mil	$\overline{M}$ un millón

No resulta fácil manejar los números romanos. Por ejemplo, el significado de *MMMCDXLIIII* sólo se vuelve obvio cuando mentalmente se introducen paréntesis de forma que (*MMM*)(*CD*)(*XL*)(*IIII*) se lea después como 3000 + 400 + 40 + 4 = 3444. Pero intente sumar *MMMCDXLIIII* + *CCCXCIIII*. Un romano experto en este arte tendría sus atajos y sus trucos, pero para nosotros es difícil obtener la solución correcta sin calcularla primero en el sistema decimal y traducir el resultado a la notación romana:

Suma

3444	→	*MMMCDXLIIII*
+ 394	→	*CCCXCIIII*
= 3838	→	*MMMDCCCXXXVIII*

600 d.C.
En India se usa la precursora de nuestra notación decimal moderna

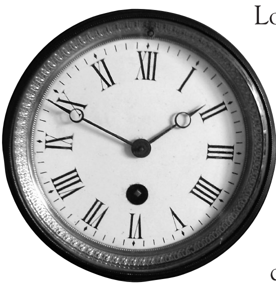
1200
Se extiende el sistema hindú-arábigo de escribir los números 1, ..., 9 y un cero

1600
Los símbolos del sistema decimal adoptan sus formas modernas reconocibles

La multiplicación de dos números es mucho más difícil y podría ser imposible dentro del sistema básico, ¡incluso para los romanos! Para multiplicar 3444 × 394 necesitamos los apéndices medievales.

Multiplicación

3444	→	*MMMCDXLIIII*
× 394	→	*CCCXCIIII*
= 1.356.936	→	$\overline{M}\,\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{C}\,\overline{L}\,\overline{V}$*MCMXXXVI*



Un reloj
de Luis XIIII

Los romanos no tenían ningún símbolo concreto para el cero. Si usted le pidiera a un ciudadano vegetariano de Roma que anotara cuántas botellas de vino había consumido ese día, él podría escribir III, pero si le preguntara cuántos pollos había comido, no podría escribir 0. Vestigios del sistema romano sobreviven en la paginación de algunos libros (aunque no de éste) y en las piedras angulares de los edificios. Algunas construcciones nunca fueron utilizadas por los romanos, como *MCM* para representar 1900, sino que se introdujeron por motivos estilísticos en tiempos modernos. Los romanos habrían escrito *MDCCCC*. El decimocuarto rey Luis de Francia, universalmente conocido en la actualidad como Luis XIV, en realidad prefería que le conociera como Luis XIIII y tenía por norma que sus relojes mostraran las 4 en punto como *IIII* en punto.

Los números enteros decimales Nosotros identificamos de forma natural los «números» con los números decimales. El sistema decimal está basado en el diez, y utiliza los números 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. En realidad está basado en «decenas» y «unidades», pero las unidades pueden absorberse en la «base 10». Cuando anotamos el número **394**, podemos explicar su significado decimal diciendo que está compuesto por **3** centenas, **9** decenas y **4** unidades, y podríamos escribir

$$\mathbf{394} = \mathbf{3} \times 100 + \mathbf{9} \times 10 + \mathbf{4} \times 1$$

Esto se puede escribir usando «potencias» de 10 (conocidas también como «exponenciales» o «índices»),

$$\mathbf{394} = \mathbf{3} \times 10^2 + \mathbf{9} \times 10^1 + \mathbf{4} \times 10^0$$

donde $10^2 = 10 \times 10$, $10^1 = 10$ y acordamos, aparte, que $10^0 = 1$. En esta expresión vemos de forma más clara la base *decimal* de nuestro sistema numérico cotidiano, un sistema que hace que la suma y la multiplicación sean bastante transparentes.

La coma decimal Hasta ahora hemos examinado la representación de números enteros. ¿Puede el sistema decimal hacer frente a partes de un número, como 572/1000?

Esto significa

$$\frac{572}{1000} = \frac{5}{10} + \frac{7}{100} + \frac{2}{1000}$$

Podemos tratar a los «recíprocos» de 10, 100, 1000 como potencias *negativas* de 10, de modo que

$$\frac{572}{1000} = 5 \times 10^{-1} + 7 \times 10^{-2} + 2 \times 10^{-3}$$

y esto puede escribirse como **0,572**, donde la coma decimal indica el principio de las potencias negativas de 10. Si agregamos esto a la expresión decimal de 394 obtenemos la expansión decimal para el número 394 572/1000, que es sencillamente **394,572**.

Potencias de 2	Decimal
2^0	1
2^1	2
2^2	4
2^3	8
2^4	16
2^5	32
2^6	64
2^7	128
2^8	256
2^9	512
2^{10}	1024

En el caso de números muy grandes la notación decimal puede ser muy larga, así que en este caso volvemos a la «notación científica». Por ejemplo, 1.356.936.892 puede escribirse como 1,356936892 × 10^9, que a menudo aparece como «1,356936892 × 10E9» en las calculadoras o los ordenadores. Aquí, la potencia 9 es una menos que el número de dígitos del número y la letra E significa «exponencial».

Ceros y unos Aunque la base 10 es la habitual, algunas aplicaciones requieren otras bases. El sistema binario que usa la base 2 está detrás de la potencia de los ordenadores modernos. La belleza de lo binario estriba en que cualquier número puede expresarse utilizando únicamente los símbolos 0 y 1. El inconveniente que acarrea esta economía es que las expresiones numéricas pueden ser muy largas.

¿Cómo podemos expresar **394** en notación binaria? Esta vez estamos tratando con potencias de 2, y después de cierta elaboración podemos ofrecer la expresión completa como

$$\mathbf{394} = \mathbf{1} \times 256 + \mathbf{1} \times 128 + \mathbf{0} \times 64 + \mathbf{0} \times 32 + \mathbf{0} \times 16 + \mathbf{1} \times 8 + \mathbf{0} \times 4 + \mathbf{1} \times 2 + \mathbf{0} \times 1$$

de modo que leyendo solamente los ceros y unos, **394** en binario es **110001010**.

La idea en síntesis: la escritura de los números