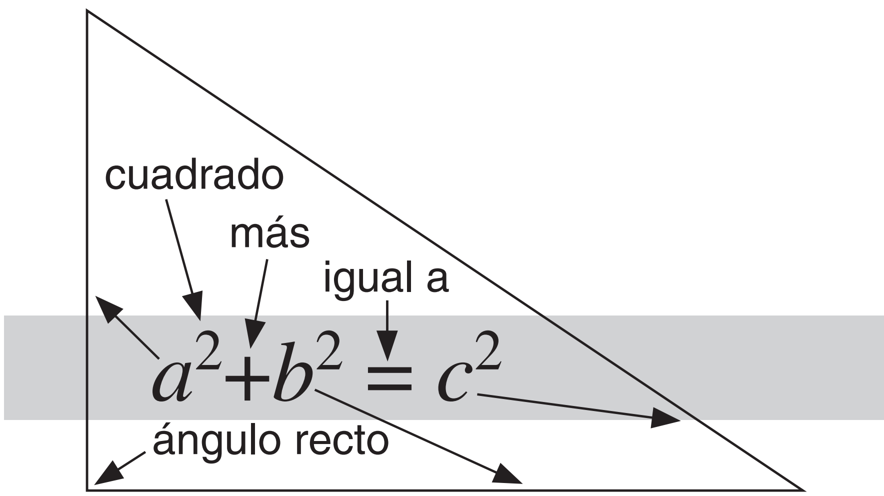
1

La hipotenusa al cuadrado
Teorema de pitágoras



¿Qué nos dice?
Como están relacionados los tres lados de un triángulo rectángulo.

¿Por qué es importante?
Nos proporciona un vínculo importante entre la geometría y el álgebra, permitiéndonos calcular distancias en términos de coordenadas. También inspiró la trigonometría.

¿Qué provocó?
Topografía, navegación y, más recientemente, relatividad general y especial, la mejor de las actuales teorías del espacio, el tiempo y la gravedad.

Pregunta a cualquier estudiante el nombre de un matemático famoso y, asumiendo que pueden pensar en uno, la mayoría de las veces optarán por Pitágoras. Si no, Arquímedes se les vendrá a la mente. Incluso el ilustre Isaac Newton desempeña el tercer papel tras estas dos superestrellas del mundo antiguo. Arquímedes fue una lumbrera y Pitágoras probablemente no lo fuera, pero se merece más crédito del que con frecuencia se le da. No por lo que logró, sino por lo que puso en marcha.

Pitágoras nació en la isla griega de Samos, en el Egeo oriental, alrededor del 570 a.C. Fue un filósofo y un geómetra. Lo poco que conocemos sobre su vida proviene de escritores bastante posteriores y su exactitud histórica es cuestionable, pero los eventos clave son probablemente correctos. Alrededor del 530 a.C. se mudó a Crotona, una colonia griega en lo que ahora es Italia. Ahí, fundó una secta filosófico-religiosa, los Pitagóricos, quienes creían que el universo estaba basado en los números. La fama actual de su fundador recae sobre el teorema que lleva su nombre. Se ha enseñado durante más de 2.000 años y ha pasado a formar parte de la cultura popular. La película de 1958 *Loco por el circo*, protagonizada por Danny Kaye, incluye una canción cuya letra en versión original dice:

> The square on the hypotenuse
> of a right triangle

is equal to
the sum of the squares
on the two adjacent sides.*

La canción original continúa con algún doble sentido sobre no permitir a tu participio oscilar y asocia a Einstein, Newton y los hermanos Wright con el famoso teorema. Los dos primeros exclaman «¡Eureka!», pero no, ese fue Arquímedes. Deducirás que las letras no son muy buenas en lo que a rigor histórico se refiere, pero eso es Hollywood. Sin embargo, en el capítulo 13 veremos que el letrista Johnny Mercer fue muy certero con Einstein, probablemente más de lo que era consciente.

El teorema de Pitágoras aparece en un chiste muy conocido en inglés, un juego de palabras muy tonto sobre una india (en inglés *squaw*, que al pronunciarlo suena muy parecido a *square*, cuadrado) y un hipopótamo (*hippopotamus*, que al pronunciarlo suena parecido a *hypotenuse,* hipotenusa). El chiste puede encontrarse en Internet sin problema, basta poner «squaw on the hippopotamus», pero es mucho más difícil descubrir de dónde proviene.[1] Hay viñetas sobre Pitágoras, camisetas y un sello griego (figura 1).

A pesar de todo este alboroto, no sabemos si realmente Pitágoras probó su teorema. Es más, no sabemos si en realidad es su teorema. Bien podría haber sido descubierto por uno de los acólitos de Pitágoras o algún escriba de Babilonia o Sumeria. Pero Pitágoras obtuvo crédito por ello y su nombre se asoció a él. Cualquiera que sea su origen, el teorema y sus consecuencias han tenido una repercusión enorme en la historia de la humanidad. Literalmente, abrió la puerta a nuestro mundo.

Los griegos no expresaron el teorema de Pitágoras como una ecuación en el sentido simbólico moderno. Eso vino más tarde, con el desarrollo del álgebra. En la Antigüedad, el teorema se expresaba ver-

* La traducción de la canción es: «El cuadrado de la hipotenusa / de un triángulo rectángulo / es igual a / la suma de los cuadrados / de los dos catetos». La versión doblada de la película hace una traducción libre y no recita el enunciado del teorema de Pitágoras. (*N. de la t.*)

FIGURA 1. Sello griego del teorema de Pitágoras.

balmente y geométricamente. Alcanzó su forma más elegante, y su primera demostración registrada, en los escritos de Euclides de Alejandría. Alrededor del 250 a.C., Euclides se convirtió en el primer matemático moderno cuando escribió su famoso *Elementos*, el libro de texto de matemáticas más influyente de todos los tiempos. Euclides convirtió la geometría en lógica haciendo explícitos sus supuestos básicos y apelando a ellos para dar pruebas sistemáticas de todos sus teoremas. Construyó una torre conceptual cuyos fundamentos eran puntos, rectas y círculos y cuyo pináculo fue la existencia de exactamente cinco sólidos regulares.

Una de las joyas de la corona de Euclides fue lo que ahora nosotros llamamos teorema de Pitágoras, la proposición 47 del libro I de los *Elementos.* En la famosa traducción de Sir Thomas Heath esta proposición dice: «En triángulos rectángulos, el cuadrado del lado subtendiente al ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados adyacentes al ángulo recto».

Por lo tanto, nada de hipopótamos. Nada de hipotenusa. Ni siquiera un explícito «suma» o «adición». Tan solo la palabra rara «subtendiente», que básicamente significa «ser opuesto a». Sin embargo, el teorema de Pitágoras claramente expresa una ecuación, porque contiene esa palabra fundamental: igual.

Para las matemáticas avanzadas, los griegos trabajaban con rectas y áreas en vez de con números. De modo que Pitágoras y sus sucesores griegos habrían decodificado el teorema como una igualdad de áreas: «el área de un cuadrado construido usando el lado más largo de un triángulo rectángulo es la suma de las áreas de los cuadrados construidos a partir de los otros dos lados». El lado más largo es la famosa hipotenusa, que significa «extender debajo», lo cual sucede si haces el dibujo con la orientación apropiada, como en la figura 2 (parte izquierda).

En apenas 2.000 años, el teorema de Pitágoras ha sido reformulado en la forma de la ecuación algebraica:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

donde c es la longitud de la hipotenusa y a y b las longitudes de los otros dos lados y el pequeño 2 elevado significa «al cuadrado». Algebraicamente, el cuadrado de cualquier número es ese número multiplicado por sí mismo, y todos sabemos que el área de cualquier cuadrado es el cuadrado de la longitud de su lado. De modo que la ecuación de Pitágoras, como la renombraré, dice lo mismo que Euclides dijo, ex-

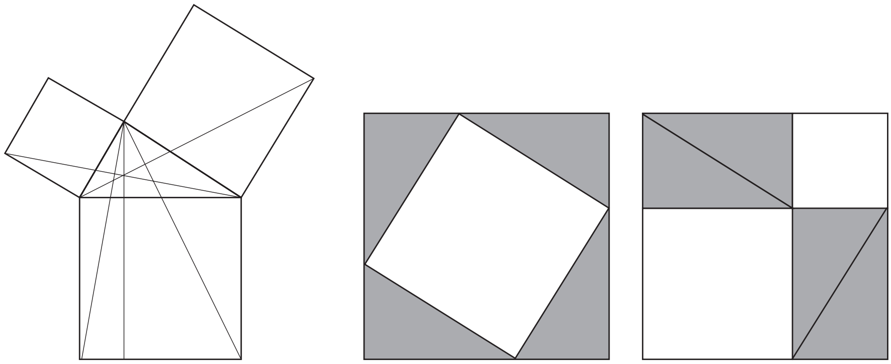


FIGURA 2. A la izquierda: construcción para la prueba de Euclides del teorema de Pitágoras. En el centro y a la derecha: prueba alternativa al teorema. Los cuadrados exteriores tienen áreas iguales y los triángulos sombreados tienen todos áreas iguales. Por lo tanto, el cuadrado inclinado tiene la misma área que los otros dos cuadrados blancos juntos.

cepto por el diverso bagaje psicológico consecuencia de cómo en la Antigüedad entendían conceptos matemáticos, como números y áreas, y en lo que no voy a entrar.

La ecuación de Pitágoras tiene muchos usos e implicaciones. De manera casi inmediata, nos permite calcular la longitud de la hipotenusa dados los otros dos lados. Por ejemplo, supongamos que $a = 3$ y $b = 4$. Entonces $c^2 = a^2 + b^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$. Por lo tanto, $c = 5$. Este es el famoso triángulo 3-4-5, omnipresente en las clases de matemáticas de la escuela, y el ejemplo más simple de una terna pitagórica: un conjunto de tres números enteros que cumplen la ecuación de Pitágoras. El siguiente ejemplo más sencillo, más que versiones a escala como 6-8-10, es la terna 5-12-13. Hay infinidad de este tipo de ternas, y los griegos sabían cómo construirlas todas. Las ternas todavía conservan cierto interés en la teoría de números, incluso en la última década se han descubierto nuevas características.

En vez de usar a y b para calcular c, se puede proceder de manera indirecta y resolver la ecuación para obtener a, siempre y cuando se conozcan b y c. También se puede responder a preguntas más sutiles, como veremos a continuación.

¿Por qué es el teorema cierto? La prueba de Euclides es bastante complicada e incluye dibujar cinco líneas extra en el diagrama (figura 2, a la izquierda) y recurrir a varios teoremas anteriores probados. Los alumnos de la época victoriana (había pocas alumnas que estudiasen geometría en aquel entonces) se referían a él con irreverencia, lo llamaban los calzones de Pitágoras. Una prueba sencilla e intuitiva, aunque no la más elegante, usa cuatro copias del triángulo para relacionar dos soluciones del mismo puzle matemático (figura 2 a la derecha). El dibujo es de por sí convincente, pero completar los detalles lógicos requiere algo más de consideración. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que la región blanca inclinada en el medio del dibujo es un cuadrado?

Hay evidencias tentadoras que indican que el teorema de Pitágoras era conocido mucho antes que Pitágoras. Una tabla de arcilla de Babilonia[2] del Museo Británico contiene, en escritura cuneiforme, un problema matemático y su respuesta, que puede ser parafraseada como:

4 es la longitud y 5 la diagonal. ¿Cuál es el ancho?
4 veces 4 es 16
5 veces 5 es 25
Quita 16 de 25 para obtener 9
¿Cuántas veces qué debo tomar para obtener 9?
3 veces 3 es 9
Por lo tanto 3 es el ancho

De modo que en Babilonia ciertamente conocían el triángulo 3-4-5, mil años antes de Pitágoras.

Otra tabla, YBC 7289, de la colección babilónica de la Universidad de Yale, es la que se muestra en la figura 3 (izquierda). Muestra un diagrama de un cuadrado de lado 30, cuya diagonal está marcada con dos listas de números: 1, 24, 51, 10 y 42, 25, 35. En Babilonia usaban la notación de base 60 para los números, así la primera lista realmente se refiere a $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$, que en notación decimal es 1,4142129. La raíz cuadrada de 2 es 1,4142135. La segunda lista es la primera multiplicada por 30. Por lo tanto los babilonios sabían que la diagonal de un cuadrado es su lado multiplicado por la raíz cuadrada de 2. Puesto que $1^2 + 1^2 = 2 = (\sqrt{2})^2$, esto también es un caso del teorema de Pitágoras.

Es incluso más extraordinaria, aunque más enigmática, la tabla Plimpton 322 de la colección George Arthur Plimpton de la Universidad de Columbia (figura 3 a la derecha). Es una tabla de números, con cuatro columnas y quince filas. La columna final tan solo enumera el número de filas, de la 1 a la 15. En 1945, los historiadores de ciencia Otto Neugebauer y Abraham Sachs[3] se dieron cuenta de que en cada fila el cuadrado del número en la tercera columna, llamémosle c, menos el cuadrado del número en la segunda columna, llamémosle b, era en sí mismo un cuadrado, llamémosle a. De esto se deduce que $a^2 + b^2 = c^2$, de modo que la tabla parece registrar ternas pitagóricas. Al menos este es el caso, siempre y cuando cuatro errores evidentes se corrijan. Sin embargo, no está totalmente claro que Plimpton 322 tenga algo que ver con las ternas pitagóricas, e incluso si tiene que ver, podría solo haber sido una lista práctica de triángulos cuyas áreas son fáciles de calcular. Estos podrían agruparse para dar buenas aproxi-

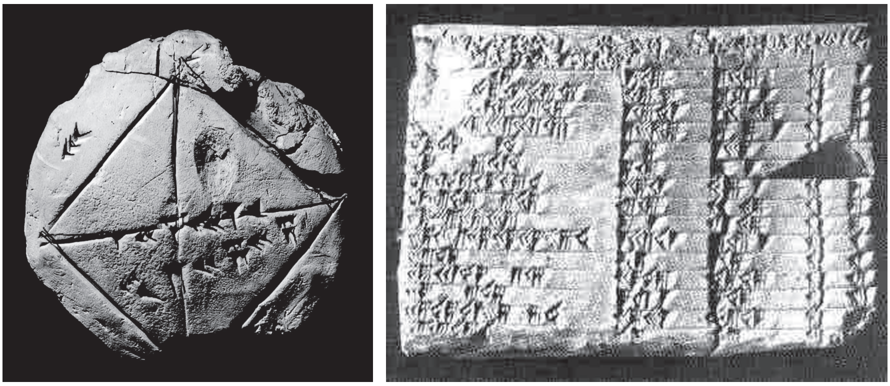


FIGURA 3. A la izquierda: YBC 7289. A la derecha: Plimpton 322.

maciones a otros triángulos y otras formas, quizá para la medición de tierras.

Otra icónica civilización de la Antigüedad es Egipto. Existen algunas evidencias de que Pitágoras podría haber visitado Egipto siendo joven y algunas de ellas conjeturan que fue entonces cuando aprendió su teorema. Los registros que sobreviven de las matemáticas egipcias ofrecen escaso soporte a esta idea, pero son pocos y especializados. Con frecuencia se afirma, normalmente en el contexto de las pirámides, que los egipcios diseñaron ángulos rectos usando un triángulo 3-4-5, formado por una cuerda con nudos en 12 intervalos iguales y los arqueólogos han encontrado cuerdas de ese tipo. Sin embargo, la afirmación no tiene mucho sentido. Dicha técnica no sería muy fiable, porque las cuerdas se pueden distorsionar y los nudos no tendrían una separación muy precisa. La precisión con la que se construyeron las pirámides de Guiza es superior a cualquiera que se pudiera haber logrado con una cuerda. Se han encontrado herramientas mucho más prácticas, parecidas a la escuadra de carpintero. Los egiptólogos especializados en las matemáticas del antiguo Egipto no tienen conocimiento registrado de cuerdas empleadas para formar triángulos del tipo 3-4-5 y ningún ejemplo de que dichas cuerdas existan. Así que esta historia, por muy bonita que pueda parecer, es casi con certeza un mito.

Si Pitágoras pudiese ser trasplantado a nuestro mundo actual, notaría muchas diferencias. En su época, el conocimiento médico era rudimentario, la luz provenía de velas y antorchas ardiendo, y la forma más rápida de comunicación era un mensajero a caballo o un faro encendido en la cima de una colina. El mundo conocido abarcaba la mayoría de Europa, Asia y África, pero no América, Australia, el Ártico o la Antártida. Muchas culturas consideraban que el mundo era plano, un disco circular o incluso un cuadrado alineado con los cuatro puntos cardinales. A pesar de los descubrimientos de la Grecia clásica, esta creencia estaba todavía muy extendida en la época medieval, en la forma de mapas *orbis terrae,* figura 4.

¿Quién fue el primero en darse cuenta de que la Tierra era redonda? Según Diógenes Laercio, un biógrafo griego del siglo III, fue Pitágoras. En su libro *Vidas, opiniones y sentencias de los filósofos más ilustres,* una colección de dichos y notas biográficas que es una de nuestras principales fuentes históricas para la vida privada de los filósofos de la antigua Grecia, escribió: «Pitágoras fue el primero que dijo que la Tierra era redonda, aunque Teofrasto se lo atribuye a Parménides y Zenón a Hesíodo». Los griegos en la Antigüedad con frecuencia reclaman que los mayores descubrimientos han sido hecho por sus fa-

FIGURA 4. Mapa del mundo hecho alrededor del año 110 por el cartógrafo marroquí al-Idrisi para el rey Roger de Sicilia.

mosos antepasados, con independencia del hecho histórico, de modo que no podemos tomarnos la afirmación en serio, pero lo que no se discute es que a partir del siglo v a.C. todos los filósofos y matemáticos griegos con reputación consideraban que la Tierra era redonda. La idea sí que parece que se originó en torno a la época de Pitágoras y quizá proviniese de uno de sus seguidores. O podría tratarse de un hecho habitual asumido, basado en la evidencia de la sombra redondeada de la Tierra en la Luna durante un eclipse, o en la analogía con la Luna, obviamente, redonda.

En cualquier caso, incluso para los griegos, la Tierra era el centro del universo y todo lo demás giraba en torno a ella. La navegación se llevaba a cabo gracias a cálculos en desuso: mirando las estrellas y siguiendo la línea de la costa. La ecuación de Pitágoras cambió todo eso. Puso a la humanidad en la senda para la comprensión actual de la geografía de nuestro planeta y su lugar en el Sistema Solar. Fue un primer paso vital hacia las técnicas geométricas necesarias para la cartografía, la navegación y la topografía. También proporcionó la llave a una relación vital entre la geometría y el álgebra. Esta línea de desarrollo nos lleva de la Antigüedad directamente a la relatividad general y la cosmología moderna (véase el capítulo 13). La ecuación de Pitágoras abrió por completo nuevas direcciones para la exploración humana, tanto metafóricamente como literalmente. Reveló la forma de nuestro mundo y su lugar en el universo.

Muchos de los triángulos que nos encontramos en la vida real no son rectángulos, de manera que las aplicaciones directas de la ecuación podrían parecer limitadas. Sin embargo, cualquier triángulo puede dividirse en dos triángulos rectángulos, como vemos en la figura 6 (página 25), y cualquier forma poligonal se puede dividir en triángulos. Así que los triángulos rectángulos son la clave, prueban que hay una relación útil entre la forma de un triángulo y la longitud de sus lados. La materia que se desarrolló a partir de esta visión es la trigonometría, que significa «medición de triángulos».

El triángulo rectángulo es fundamental en trigonometría, en particular determina las funciones básicas de la trigonometría: seno, coseno y tangente. Los nombres son de origen árabe y la historia de estas funciones y sus muchas predecesoras muestra el complicado camino por el cual surgió la versión actual del tema. No daré muchas vueltas y explicaré el resultado final. Un triángulo rectángulo tiene, obviamente, un ángulo recto, pero sus otros dos ángulos son arbitrarios, exceptuando el hecho de que suman 90º. Asociadas con cualquier ángulo hay tres funciones, esto es, reglas para calcular un número asociado a él. Para el ángulo marcado como *A* en la figura 5, usando la notación tradicional *a, b, c* para los tres lados, definimos el seno (sen), coseno (cos) y tangente (tg) como:

$$\operatorname{sen} A = a/c \qquad \cos A = b/c \qquad \operatorname{tg} A = a/b$$

Estas cantidades dependen solo del ángulo *A*, porque todos los triángulos rectángulos con un ángulo *A* dado son idénticos excepto por la escala.

En consecuencia, es posible construir una tabla de valores para sen, cos y tg para un rango de ángulos, y luego usarlos para averiguar características de los triángulos rectángulos. Una aplicación típica, la cual se remonta a la Antigüedad, es calcular la altura de una columna alta usando solo las medidas hechas en el suelo. Suponemos que, a una distancia de 100 metros, el ángulo que se forma al unir el punto con la cima de la columna es de 22º. Sea $A = 22º$ en la figura 5, de este modo *a* es la altura de la columna. Entonces, la definición de la función tangente nos dice que:

$$\operatorname{tg} 22º = a/100$$

por lo tanto

$$a = 100 \operatorname{tg} 22º$$

Como la tg 22º es 0,404, considerando tres cifras decimales, deducimos que $a = 40{,}4$ metros.

Una vez en posesión de las funciones trigonométricas, es sencillo extender la ecuación de Pitágoras a triángulos que no tiene un ángulo recto. La figura 6 nos muestra un triángulo con un ángulo *C* y lados *a, b, c*. Dividimos el triángulo en dos triángulos rectángulos como se in-

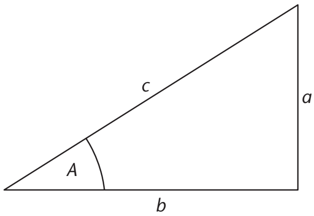


FIGURA 5. La trigonometría está basada en un triángulo rectángulo.

dica. Entonces aplicando dos veces el teorema de Pitágoras y algo de álgebra[4] se prueba que:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos C = c^2$$

la cual es parecida a la ecuación de Pitágoras, excepto por el término $-2ab \cos C$. Este «teorema del coseno» hace el mismo trabajo que el de Pitágoras, relaciona c con a y b, pero ahora tenemos que incluir información sobre el ángulo C.

El teorema del coseno es uno de los pilares principales de la trigonometría. Si conocemos dos de los lados de un triángulo y el ángulo que se forma entre ellos, podemos usarlo para calcular el tercer lado. Luego, con otras ecuaciones, calculamos los ángulos restantes. En última instancia, a todas estas ecuaciones se les puede encontrar el origen en los ángulos rectángulos.

Armados con ecuaciones trigonométricas y aparatos de medida apropiados, podemos tomar mediciones y hacer mapas precisos. Esto no es una idea nueva. Aparece en el papiro de Rhind, una colección de antiguas técnicas matemáticas egipcias que datan del 1650 a.C. El filó-

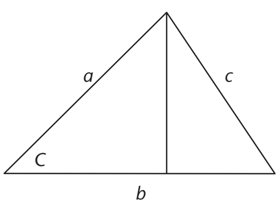


FIGURA 6. División de un triángulo en dos con ángulos rectos.

sofo griego Tales usó la geometría de triángulos para estimar la altura de las pirámides de Guiza alrededor del 600 a.C. Herón de Alejandría describió la misma técnica en el 50 d.C. Alrededor del 240 a.C., el matemático griego Eratóstenes calculó el tamaño de la Tierra observando el ángulo del Sol al mediodía en dos sitios diferentes. Alejandría y Siena (en la actualidad Asuán) en Egipto. Una serie de eruditos árabes preservaron y desarrollaron estos métodos aplicándolos, en concreto, a mediciones astronómicas tales como el tamaño de la Tierra.

La topografía empezó a despegar en 1533 cuando el cartógrafo holandés Gemma Frisius explicó cómo usar la trigonometría para elaborar mapas precisos, en *Libellus de Locorum Describendorum Ratione* (Folleto relativo al modo de describir lugares). El método se propagó por toda Europa, llegando a oídos del noble y astrónomo danés Tycho Brahe. En 1579 Tycho lo usó para trazar un mapa preciso de Hven, la isla donde estaba su observatorio. En 1615 el matemático holandés Willebrord Snellius (Snel van Royen) había transformado el método en, esencialmente, su forma moderna: la triangulación. El área que se está midiendo se cubre con una red de triángulos. Midiendo una longitud inicial con mucho cuidado y muchos ángulos, la posición de las esquinas del triángulo y, por tanto, cualquier característica interesante en ellos, se puede calcular. Snellius calculó la distancia entre dos poblaciones holandesas, Alkmaar y Bergen op Zoom, usando una red de 33 triángulos. Escogió estas dos poblaciones porque se encontraban en el mismo meridiano y estaban separadas exactamente un grado. Sabiendo la distancia entre ellas, podía calcular el tamaño de la Tierra, que publicó en su *Eratosthenes Batavus* (El Eratóstenes holandés) en 1617. Su resultado tiene un margen de error del 4 %. También modificó las ecuaciones de trigonometría para reflejar la naturaleza esférica de la superficie terrestre, un paso importante hacia una navegación eficaz.

La triangulación es un método indirecto para calcular distancias usando ángulos. Cuando se mide una franja de tierra, ya sea un edificio o un país, la principal consideración práctica es que es mucho más fácil medir ángulos que medir distancias. La triangulación nos permite medir unas pocas distancias y muchos ángulos, a partir de ahí, todo lo demás se obtiene usando las ecuaciones trigonométricas. El método empieza marcando una línea entre dos puntos, llamada línea de base, y midiendo su longitud directamente con gran precisión. Después se escoge un punto que destaque en el terreno y sea visible desde los dos extremos de la línea de base. Ahora tenemos un triángulo y conocemos uno de sus lados y dos de sus ángulos, lo cual nos da su forma y tamaño. Podemos usar la trigonometría para calcular los otros dos lados.

A todos los efectos, ahora tenemos dos líneas de base más, los lados del triángulo que acabamos de calcular. A partir de ellas, podemos medir los ángulos a otros puntos más distantes. Continuamos con este proceso para crear una red de triángulos que cubra el área que se está midiendo. Desde cada triángulo observa los ángulos a todas las características significativas: torres de iglesia, cruces de caminos, etcétera. El mismo truco trigonométrico ubica con precisión su localización. Para un giro final, la exactitud de toda la medición puede comprobarse midiendo directamente uno de los lados.

A finales del siglo XVIII, la triangulación se empleaba de manera rutinaria en las mediciones. La Agencia Nacional para el Mapeado de Gran Bretaña empezó en 1783 y tardó setenta años en completar la tarea. El Gran Proyecto de Topografía Trigonométrica de la India, el cual entre otras cosas hizo el mapa del Himalaya y determinó la altura del monte Everest, empezó en 1801. En el siglo XXI, la mayoría de las mediciones a gran escala se hacen usando fotografías de satélites y GPS (el sistema de posicionamiento global). La triangulación explícita ya no se emplea. Pero está todavía ahí, entre bastidores, en los métodos usados para deducir ubicaciones a partir de los datos de los satélites.

El teorema de Pitágoras fue también fundamental para la invención de la geometría analítica. Este es un modo de representar figuras geométricas en términos numéricos, usando un sistema de rectas conocidas como ejes, que se etiquetan con números. La versión más popular es conocida como coordenadas cartesianas en el plano, en honor al matemático y filósofo francés René Descartes, que fue uno de los grandes pioneros en esta área, aunque no el primero. Dibuja dos líneas; una horizontal etiquetada con X y una vertical etiquetada con Y. Estas líneas son conocidas como ejes y se cruzan en un punto llamado origen. Marca puntos en estos dos ejes según su distancia al origen, como las marcas en una regla, los números positivos a la derecha y hacia arriba y los negativos a la izquierda y hacia abajo. Ahora podemos determinar cualquier punto en el plano en términos de dos números, x e y, sus coordenadas, conectando el punto con los dos ejes como aparece en la figura 7. El par de números (x, y) especifica por completo la ubicación del punto.

Los grandes matemáticos de la Europa del siglo XVII se dieron cuenta de que, en este contexto, una recta o una curva en el plano correspondía a un conjunto de soluciones (x, y) de alguna ecuación en x e y. Por ejemplo, $y = x$ determina una línea diagonal inclinada desde la parte baja izquierda a la parte alta derecha, porque (x, y) está en esa recta sí y solo sí $y = x$. En general, una ecuación lineal de la forma $ax + by = c$, en la que a, b y c son constantes, se corresponde con una línea recta y viceversa.

¿Qué ecuación se corresponde con una circunferencia? Ahí es donde aparece la ecuación de Pitágoras. Esta implica que la distancia r del origen al punto (x, y) satisface:

$$r^2 = x^2 + y^2$$

y podemos resolverla para r, obteniendo:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

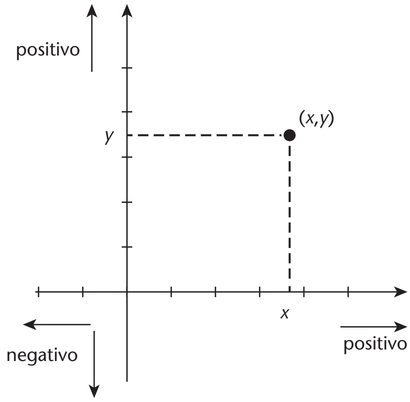


FIGURA 7. Los dos ejes y las coordenadas de un punto.

Puesto que el conjunto de todos los puntos que se encuentran a una distancia r del origen es una circunferencia de radio r, cuyo centro es el origen, esa misma ecuación define una circunferencia. De modo más general, a la circunferencia de radio r con centro en (a, b) le corresponde la ecuación:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Y la misma ecuación determina la distancia r entre los dos puntos (a, b) y (x, y). Por lo tanto, el teorema de Pitágoras nos dice dos cosas fundamentales: cuál es la ecuación de una circunferencia y cómo calcular la distancia entre coordenadas.

Entonces, el teorema de Pitágoras es importante por sí solo, pero ejerce incluso más influencia a través de sus generalizaciones. Aquí continuaré hablando solo de una ramificación de estos desarrollos posteriores para destacar la conexión con la relatividad, a la cual volveremos en el capítulo 13.

La prueba del teorema de Pitágoras en los *Elementos* de Euclides coloca el teorema firmemente en el mundo de la geometría euclidiana. Hubo un tiempo en que esa frase podría ser remplazada por «geometría» sin más, porque se asumía de modo general que la geometría euclidiana era la verdadera geometría del espacio físico. Era obvio. Como la mayoría de las cosas asumidas por ser obvias, resultó ser falsa.

Euclides derivó todos sus teoremas de un pequeño número de suposiciones básicas, las cuales clasificó como definiciones, axiomas y nociones comunes. Su sistema era elegante, intuitivo y conciso, con una flagrante excepción, su quinto axioma: «si una recta que corta a otras dos rectas hace los ángulos interiores del mismo lado menores que dos ángulos rectos; las dos rectas, si se alargan indefinidamente, se cortan en el lado en que los ángulos son menores que dos ángulos rectos». Esto es un trabalenguas, la figura 8 puede ser de ayuda.

Durante más de mil años, los matemáticos trataron de arreglar lo que veían como un defecto. No estaban buscando únicamente algo más simple y más intuitivo, que llegase a la misma conclusión, aunque varios de ellos encontraron algo de este tipo. Lo que querían era librarse del axioma extraño por completo probándolo. Después de va-

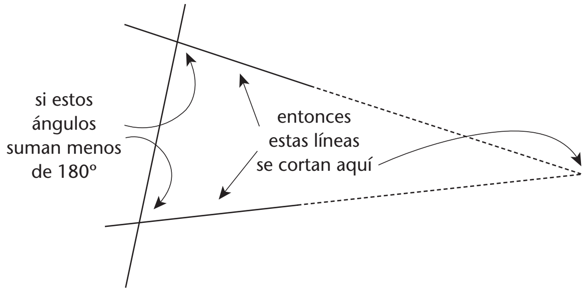


FIGURA 8. Axioma de las paralelas de Euclides.

rios siglos, los matemáticos finalmente se dieron cuenta de que había geometrías alternativas no euclidianas, lo que implicaba que dicha prueba no existía. Estas nuevas geometrías eran tan consistentes lógicamente como la de Euclides, y cumplían todos sus axiomas excepto el axioma de las paralelas. Podían ser interpretadas como la geometría de las geodésicas, los caminos más cortos en superficies curvas (figura 9). Esto centró la atención en el significado de curvatura.

El plano de Euclides es plano, curvatura cero. Una esfera tiene la misma curvatura en todos los puntos y es positiva: cerca de cualquier punto parece como una cúpula. (Un sutil matiz técnico: las circunferencias máximas se cortan en dos puntos, no en uno como indica el axioma de Euclides, de modo que la geometría de la esfera se modifica mediante la identificación de puntos antipodales en la esfera, considerando que estos son idénticos. La superficie pasa a ser lo denominado plano proyectivo y la geometría se llama elíptica.) También existe una superficie de curvatura constante negativa que en torno a cualquier punto de ella parece una silla de montar. Esta superficie se llama el plano hiperbólico, y puede representarse de varios modos totalmente prosaicos. Quizá el más simple es considerarlo como el interior de un círculo y definir «recta» como un arco de un círculo que se corta con la arista del círculo en un ángulo recto (figura 10).

Puede parecer que, mientras la geometría del plano podría ser no euclidiana, esto es imposible para la geometría del espacio. Puedes curvar una superficie presionándola a una tercera dimensión, pero no puedes curvar un espacio porque no hay espacio para una dimensión extra a la que empujarlo. Sin embargo, esta es una visión un poco sim-

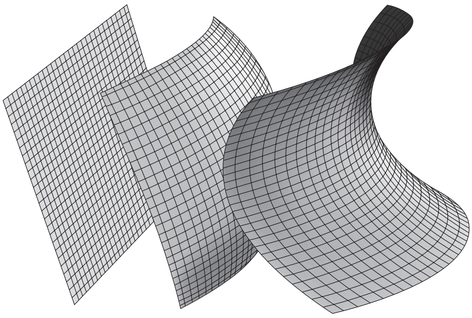


FIGURA 9. Curvatura de una superficie. A la izquierda: curvatura cero. En el centro: curvatura positiva. A la derecha: curvatura negativa.

plista. Por ejemplo, podemos modelar un espacio hiperbólico tridimensional usando el interior de una esfera. Las rectas se definen como arcos de circunferencia que se cortan en el borde haciendo ángulos rectos, y los planos se definen como partes de la esfera que se cortan con el borde en ángulo recto. Esta geometría es tridimensional, satisface todos los axiomas de Euclides excepto el quinto y, en un sentido que puede precisarse, define un espacio curvo tridimensional. Pero no es curvo en torno a nada o en ninguna nueva dirección.

Tan solo es curvo.

Con todas estas nuevas geometrías disponibles, un nuevo punto de vista empezaba a ocupar el escenario central, pero como visión física, no matemática. Puesto que el espacio no tiene que ser euclidiano, ¿qué forma tiene? Los científicos se dieron cuenta de que realmente no lo sabían. En 1813, Gauss, que sabía que en un espacio curvo los ángulos de un triángulo no suman 180º, midió los ángulos de un triángulo for-

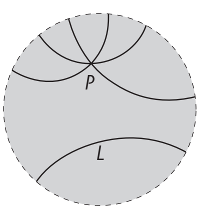


FIGURA 10. Círculo modelo del plano hiperbólico. Las tres líneas que pasan por *P* no se cruzan con *L*.

mado por tres montañas —Brocken, Hohehagen e Inselberg—. Obtuvo una suma que era 15 segundos mayor que 180º. Si era correcto, esto indicaba que el espacio, en esa región al menos, estaba curvado positivamente. Pero necesitaríamos un triángulo mucho mayor y unas mediciones mucho más precisas para eliminar los errores de la observación. De modo que las observaciones de Gauss no eran concluyentes. El espacio podría ser euclidiano, y también podría no serlo.

Mi comentario de que el espacio hiperbólico tridimensional es «tan solo curvo» depende de un nuevo punto de vista de la curvatura, lo cual también nos remite a Gauss. La esfera tiene una curvatura constante positiva y el plano hiperbólico tiene una curvatura constante negativa. Pero la curvatura de una superficie no tiene que ser constante. Podría ser una curva muy pronunciada en algunas zonas y menos pronunciada en otras. De hecho, podría ser positiva en algunas regiones y negativa en otras. La curvatura podría variar continuamente de una parte a otra. Si la superficie se parece a un hueso de perro, entonces los pegotes de los extremos están positivamente curvados, pero la parte que los une, está curvada negativamente.

Gauss buscó una fórmula para calificar la curvatura de una superficie en cualquiera de sus puntos. Cuando finalmente la encontró y la publicó en su *Disquisitiones Generales Circa Superficies Curva* (Investigación general sobre superficies curvas) en 1828, la llamó el «teorema egregium» (notable). ¿Qué es lo que era tan notable? Gauss había empezado con una visión naif de la curvatura, incrustar la superficie en el espacio tridimensional y calcular cómo de curvada estaba. Pero la respuesta le indicó que este espacio que la rodeaba no tenía importancia. No formaba parte de la fórmula. Escribió: «La fórmula ... llega por sí misma a un teorema notable: si una superficie curva se desarrolla sobre cualquier otra superficie, sea la que sea, la medida de la curvatura en cada punto no sufre ningún cambio». Con «desarrolla» quiere decir «envuelve alrededor».

Coge una hoja plana de papel, curvatura cero. Ahora envuélvela alrededor de una botella. La botella es cilíndrica y el papel se ajusta perfectamente, sin tener que doblarse, estirarse o romperse. Está curvada en lo que concierne a la apariencia visual, pero es un tipo de curvatura trivial, porque no ha cambiado la geometría del papel en ningún aspecto. Es tan solo un cambio en la manera en que el papel está colocado en el espacio que lo rodea. Pon el papel en plano y dibuja un ángulo recto, mide sus lados, compruébalos con el teorema de Pitágoras. Ahora enrolla el dibujo alrededor de la botella. La longitud de los lados medida en el papel, no cambia. Todavía se verifica el teorema de Pitágoras.

Sin embargo, la superficie de una esfera tiene curvatura distinta de cero. De modo que no es posible envolver una hoja de papel en torno a la esfera y que se ajuste bien sin tener que doblarla, estirarla o romperla. La geometría de la esfera es intrínsecamente diferente de la geometría del plano. Por ejemplo, el ecuador terrestre y las líneas de longitud de 0º a 90º al norte determinan un triángulo que tiene tres ángulos rectos y tres lados iguales (considerando que la Tierra es una esfera). Por lo tanto la ecuación de Pitágoras es falsa.

Hoy en día, llamamos curvatura a la «curvatura de Gauss» en su sentido intrínseco. Gauss explicó por qué es importante usando una analogía gráfica todavía vigente. Imagina una hormiga confinada en la superficie. ¿Cómo puede averiguar si la superficie está curvada? No puede salirse de la superficie para ver si parece curvada. Pero puede usar la fórmula de Gauss haciendo las medidas apropiadas simplemente en la superficie. Nos encontramos en la misma posición que la hormiga cuando intentamos descubrir la geometría verdadera de nuestro espacio. No podemos salirnos de él. Antes podíamos emular a la hormiga tomando medidas, sin embargo, necesitamos una fórmula para la curvatura de un espacio de tres dimensiones. Gauss no dio una. Pero uno de sus estudiantes, en un arranque de temeridad, reclamó que él la tenía.

El estudiante era Georg Bernhard Riemann, y estaba intentando lograr lo que las universidades alemanas llaman «habilitación», el paso siguiente tras el doctorado. En la época de Riemann esto significaba que podrías cobrar a los estudiantes una tasa por tus clases. Antes y ahora, obtener la habilitación requiere presentar tu investigación en una conferencia pública que es también un examen. El candidato ofrece varios temas y el examinador, que en el caso de Riemann era Gauss, escoge uno. Riemann, un brillante talento matemático, hizo una lista con varios temas ortodoxos que dominaba de sobra, pero en un ataque de locura también propuso «sobre la hipótesis en la que se funda la geometría». Gauss, que había estado interesado durante mucho tiempo en ello, lógicamente, lo escogió para el examen de Riemann.

Al instante, Riemann se arrepintió de ofrecer algo que era un gran reto. Tenía una fuerte aversión a hablar en público y no había analizado las matemáticas en detalle. Tan solo tenía algunas ideas vagas, aunque fascinantes, sobre la superficie curvada. Para cualquier dimensión. Lo que Gauss había hecho para dimensión dos con su teorema egregium, Riemann quería hacerlo para tantas dimensiones como se quisiera. Ahora tenía que ejecutarlo, y rápido. La conferencia era inminente. La presión casi le provocó una crisis nerviosa y no ayudó su trabajo para sobrevivir ayudando al colaborador de Gauss, Wilhelm Weber, experimentando con la electricidad. Bueno, quizá sí, porque mientras Riemann estaba pensando en la relación entre fuerzas eléctricas y magnéticas en su trabajo, se dio cuenta de que la fuerza puede relacionarse con la curvatura. Trabajando hacia atrás, podía usar la matemática de las fuerzas para definir la curvatura, como necesitaba en su examen.

En 1854 Riemann pronunció su conferencia, la cual tuvo una calurosa acogida y con razón. Empezó definiendo lo que llamó una «variedad». Formalmente una «variedad» está definida por un sistema de muchas coordenadas, aunque con una fórmula para la distancia entre los puntos cercanos, ahora llamada métrica de Riemann. Informalmente, una variedad es un espacio multidimensional en toda su gloria. El clímax de la conferencia de Riemann fue una fórmula que generalizaba el teorema egregium de Gauss, definía la curvatura de una variedad solamente en términos de su métrica. Y es aquí donde el relato cierra el círculo por completo, como la serpiente Uróboros se traga su propia cola, porque la métrica contiene restos visibles del teorema de Pitágoras.

Supón, por ejemplo, que la variedad tiene tres dimensiones. Sean las coordenadas de un punto (x, y, z) y sea $(x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)$ un punto cercano, donde la d significa «un poco de». Si el espacio es euclidiano, con curvatura cero, la distancia $\mathrm{d}s$ entre estos dos puntos satisface la ecuación

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

y justo esto es el teorema de Pitágoras restringido a puntos que están cerca los unos de los otros. Si el espacio es curvado, con la curvatura variable de un punto a otro, la fórmula análoga, la métrica, tiene este aspecto:

$$\mathrm{d}s^2 = X\,\mathrm{d}x^2 + Y\,\mathrm{d}y^2 + Z\,\mathrm{d}z^2 + 2U\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + 2V\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z + 2W\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Aquí X, Y, Z, U, V, W pueden depender de x, y y z. Puede parecer un poco un trabalenguas, pero, como la ecuación de Pitágoras, encierra sumas de cuadrados (y productos muy relacionados de dos cantidades como $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$) más una cuantas florituras extra. Lo segundo se da porque la fórmula puede representarse como una tabla o matriz 3×3:

$$\begin{bmatrix} X & U & V \\ U & Y & W \\ V & W & Z \end{bmatrix}$$

Donde X, Y, Z aparecen una vez, pero U, V, W aparecen dos veces. La tabla es simétrica sobre su diagonal, en el lenguaje de la geometría diferencial es un tensor simétrico. La generalización de Riemman del teorema egregium de Gauss es una fórmula para la curvatura de la variedad, en cualquier punto dado, en términos de este tensor. En el caso especial en que se puede aplicar Pitágoras, la curvatura resulta ser cero. Por lo tanto, la validez de la ecuación de Pitágoras es una prueba para la ausencia de curvatura.

Como la fórmula de Gauss, la expresión de Riemann para la curvatura depende solo de la métrica de la variedad. Una hormiga confinada en la variedad podría observar la métrica midiendo pequeños triángulos y calculando la curvatura. La curvatura es una propiedad intrínseca de una variedad, independiente de cualquier espacio que le rodea. De hecho, la métrica ya determina la geometría, de modo que no se necesita ningún espacio que la rodee. En particular, nosotros, hormigas humanas, podemos preguntar qué forma tiene nuestro vasto y misterioso universo, y esperar responder mediante observaciones que no requieren que nos salgamos del universo. Lo cual está bien, porque no podemos hacerlo.

Riemann encontró su fórmula usando las fuerzas para definir la geometría. Cincuenta años más tarde, Einstein le dio la vuelta completamente a la idea de Riemann, usando la geometría para definir la fuerza de la gravedad en su teoría general de la relatividad e inspirando nuevas ideas sobre la forma del universo (véase el capítulo 13). Es una progresión de los eventos sorprendente. Primero surgió la ecuación de Pitágoras hace alrededor de 3.500 años para medir la tierra de un granjero. Su extensión a triángulos no rectángulos y a triángulos en la esfera nos permitió hacer mapas de nuestros continentes y medir nuestro planeta. Y una egregia generalización nos permitió medir la forma del universo. Las grandes ideas tienen comienzos pequeños.